ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 30, Nos. 1-2, 1978

CONDITION DE CHAINE EN THEORIE DES RELATIONS

PAR
MAURICE POUZET

ABSTRACT
Recall that the age of a relation is the set of isomorphy types of its finite subrelations. Here we prove, with a topological argument, that if the set of ages included in a given age is at most denumerable, then it is partially well ordered by inclusion.

I. Vocabulaire relationiste[†]

I-1. *Relation, restriction d'une relation, isomorphisme local entre relations, type d'isomorphie*

I-1.1. Etant donnés un ensemble E et un entier m, nous appelons *relation* m-*aire de base* E toute application R de l'ensemble E^m des m-uples $(x_1 \cdots x_m)$ extraits de E dans l'ensemble aux deux valeurs $-$ et $+$. Etant donnée une partie A de E nous appelons *restriction de* R *à* A et nous notons $R \mid A$ la restriction de l'application R au sous-ensemble A^m des m-uples extraits de A.

Etant données deux relations m-aires R et R' de bases respectives E et E' nous dirons qu'une application bijective f de E sur E' est un *isomorphisme de* R *sur* R' lorsque pour tout m-uple $(x_1 \cdots x_m)$ extrait de E on a $R(x_1 \cdots x_m) = R'(f(x_1) \cdots f(x_m))$. Nous appelons *isomorphisme local de* R *vers* R' tout isomorphisme d'une restriction de R sur une restriction de R'. Enfin lorsque R et R' sont égales nous remplaçons le mot isomorphisme par *automorphisme*.

Nous disons que deux relations R et R' sont *isomorphes* ou ont même *type d'isòmorphie*, ce que nous notons $\tau(R) = \tau(R')$, lorsqu'il existe un isomorphisme de R sur R'. Comme dans ce qui suit il est nécessaire de considérer des ensembles de relations définies à l'isomorphie près, il nous est commode de

[†] Les notions et leur terminologie introduites dans cette section sont pour l'essentiel empruntées à R. Fraïssé [3].

Received January 10, 1973, in first revised form May 16, 1976 and in final form August 2, 1977

définir le *type d'isomorphie* d'une relation R de base finie à n élèments, que nous notons encore $\tau(R)$ comme l'ensemble de toutes les relations R' de base $\{0,1,\cdots,n-1\}$ qui sont isomorphes à R.

I-1.2. Etant donnée une famille $\mu=(n_i)_{i\in I}$ d'entiers n_i nous appelons *structure relationnelle* (ou *multirelation* lorsque I est un ensemble fini de la forme $0,1,\cdots,p-1)$ μ*-aire de base* E toute famille $M=(R_i)_{i\in I}$ formée des relations n_i-aires R_i de base E. Les notions ci-dessus s'étendent directement à ces structures: par exemple pour deux structures relationnelles μ-aires $M=(R_i)_{i\in I}$ et $M'=(R'_i)_{i\in I}$ un *isomorphisme* de M sur M' est une bijection f de la base de M sur la base de M' qui pour chaque i est un isomorphisme de R_i sur R'_i.

I–1.3. *Avertissement.* Sauf en VII nous ne considèrerons que des multirelations d'une même arité $\mu=(n_0,\cdots,n_{p-1})$. Par un abus de langage commode nous les appellerons *relations* et nous les désignerons par les lettres $R,R',\cdots,S,S',\cdots$, etc. $\cdots$. S'il n'y a pas de risque de confusion nous utiliserons aussi ces lettres pour désigner les types d'isomorphie des relations.

I–2. *Abritement entre relations, âge d'une relation*

I–2.1 Nous disons que la relation R s'*abrite* dans la relation S et nous notons $R\leqq S$ lorsque R est isomorphe à au moins une restriction de S. Comme dans un tel cas toute relation R' isomorphe à R s'abrite dans toute relation S' isomorphe à S nous disons encore que le type d'isomorphie de R s'abrite dans celui de S ce que nous notons $\tau(R)\leqq\tau(S)$.

L'abritement entre type est un préordre mais, sauf pour les types de relations de base finie, ce n'est pas en général un ordre.

I–2.2. Etant donnée une relations S nous appelons *âge* de S l'ensemble des types d'isomorphie des R de base finie qui s'abritent dans S (c'est-à-dire l'ensemble des types d'isomorphie des restrictions de S aux parties finies de sa base). Nous disons qu'une relation R est *moins âgée* que la relation S lorsque l'âge de R est inclus dans l'âge de S (nous disons aussi sous-âge pour âge inclus).

I–2.3. La caractérisation suivante des âges est dûe à R. Fraïssé [3]. *Un ensemble (non vide), $\mathscr{C}$ de types de relations de bases finies est l'âge d'une relation si et seulement si sont vérifiées les deux conditions suivantes*:

(A1) *$\mathscr{C}$ est clos pour l'abritement: c'est-à-dire que si $R\in\mathscr{C}$ et $R'\leqq R$ alors $R'\in\mathscr{C}$.*

(A2) *$\mathscr{C}$ est filtrant pour l'abritement, c'est-à-dire que si $R,R'\in\mathscr{C}$ alors il existe $R''\in\mathscr{C}$ tel que $R,R'\leqq R''$.*

(Les conditions (A1) et (A2) sont évidemment nécessaires, pour voir qu'elles sont suffisantes on peut, puisque $\mathscr{C}$ est dénombrable et filtrant, extraire de $\mathscr{C}$ une suite croissante pour l'abritement $R_0 \leqq R_1 \leqq \cdots \leqq R_n \cdots$ telle que tout élément de $\mathscr{C}$ s'abrite dans au moins un des R_n. En choisissant une suite de relations R'_i, de sorte que chaque R'_i soit de type R_i et soit une restriction de R'_{i+1} on obtient sur la réunion de leurs bases une relation d'âge $\mathscr{C}$).

I–2.4. Ainsi l'ensemble Ω des types d'isomorphie des relations de bases finies (et de même arité) forme un âge. Comme les relations d'une même arité $\mu = (m_0, \cdots, m_p)$ sur un même ensemble fini E à n éléments sont en nombre fini (au plus égal à $2^{n^{m_0}+n^{m_{p-1}}}$) leurs types d'isomorphie sont en nombre fini. Par suite l'âge Ω, et donc tout sous-âge, est au plus dénombrable.

I–3. *Bornes d'une relation*

I–3.1. Etant donnée une relation S nous disons qu'une relation R de base finie est une *borne* de S lorsque R ne s'abrite pas dans S alors que toute restriction de R à une partie stricte de sa base s'abrite dans S. Plus généralement étant donnée une classe $\mathscr{C}$ de relations nous disons qu'une relation R de base finie est une *borne* de $\mathscr{C}$ lorsque R ne s'abrite dans aucune relation de $\mathscr{C}$ alors que toute restriction de R à une partie stricte de sa base s'abrite dans au moins une relation de $\mathscr{C}$. Nous définissons de même la notion de *borne* pour les types. Ainsi une *borne d'un type S est le type d'une relation de base finie minimal, pour l'abritement, parmi ceux ne s'abritant pas dans S*; et, par exemple, une borne d'un ensemble $\mathscr{C}$ de types, clos pour l'abritement, est le type d'une relation de base finie, minimal parmi ceux n'appartenant pas à $\mathscr{C}$.

I–3.2. Avec ces définitions résultent donc que les *types des bornes d'une relation sont exactement les bornes de son âge et que deux relations ont même âge si et seulement si elles ont les mêmes bornes.*

I–4. *Introduction à la comparaison des âges*

L'étude qui va suivre a pour origine le résultat suivant:

Si un âge $\mathscr{A}$ ne contient pas d'ensemble infini formé de types de relations deux à deux incomparables pour l'abritement, alors:

(1) *$\mathscr{A}$ ne contient qu'on nombre dénombrable de sous-âges*;

(2) *$\mathscr{A}$ ne contient pas de suite strictement décroissante (pour l'inclusion) de sous-âges.*

La question qui nous intéresse est de savoir si les conditions ci-dessus sont équivalentes. Bien que nous ne sachions pas actuellement y répondre complètement nous montrons dans ce qui suit que la condition 1 entraîne toujours la condition 2.

Avant d'entamer cette étude donnons quelques exemples d'âges vérifiant les conditions ci-dessus et donc, en l'état actuel de nos connaissances, d'âges ne contenant pas d'ensemble infini formé de types de relations deux à deux incomparables pour l'abritement, que nous appelons avec R. Fraïssé *âges belordonnés*; ainsi sont belordonnés l'âge d'une chaîne (ou ordre total); l'âge d'une relation presque enchaînable (voir au IV–2.1. ci-dessous); l'âge de la "consécutivité" (relation binaire C de base $\mathbf{N}$ qui prend la valeur + pour les seuls couples (x, y) pour lesquels $y = x + 1$) et l'âge formé des types des arbres ordonnés finis (un arbre ordonné etant un ensemble ordonné dans lequel deux éléments incomparables n'admettent pas de majorant commun. Ce dernier fait (non trivial) dû à Kruskal [9] peut s'obtenir au moyen de la technique de la "mauvaise suite minimale" de Nash–Williams. D'autres exemples obtenus par la même technique figurent en [11]. Signalons enfin qu'on peut construire un *nombre continupotent* d'âges belordonnés, chacun étant l'âge d'une birelation (C, U) où C est la consécutivité sur $\mathbf{N}$ et U une certaine relation unaire (la construction de ces U est trop longue pour être abordée ici, voir [12]).

II. Topologie sur les âges

II–1.1. Considérons un âge $\mathcal{A}$ et l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ des âges contenus dans $\mathcal{A}$, que nous appellerons la *descendance de* $\mathcal{A}$. A deux ensembles finis F et G formés chacun d'éléments de $\mathcal{A}$, associons l'ensemble $\mathcal{A}_F^G$ des sous-âges de $\mathcal{A}$ contenant F et ne rencontrant pas G. Il est clair que l'ensemble de tous les $\mathcal{A}_F^G$ est stable par l'intersection finie; par conséquent les réunions quelconques d'ensembles $\mathcal{A}_F^G$ sont les ouverts d'une topologie sur $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Nous l'appellerons la *topologie de la descendance de* $\mathcal{A}$.

II–1.2. *Caractérisation.* Si nous considérons l'ensemble de toutes les parties d'un âge $\mathcal{A}$ comme l'ensemble $2^{\mathcal{A}}$ muni de la topologie produit alors en premier lieu: *la topologie de la descendance de* $\mathcal{A}$ *n'est autre que la topologie induite sur* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *par celle de* $2^{\mathcal{A}}$ (du simple fait qu'un ouvert de $2^{\mathcal{A}}$ est une réunion d'ouverts élémentaires, chaque ouvert élémentaire étant formé de toutes les parties contenant une partie finie F de $\mathcal{A}$, et ne contenant aucun élément d'une autre partie finie G de $\mathcal{A}$); en second lieu $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *est un sous-espace fermé de* $2^{\mathcal{A}}$. (Si une suite $(\mathcal{A}'_n)_{n\in N}$ de sous-âges $\mathcal{A}'_n$ de $\mathcal{A}$ converge vers la partie X alors X est évidemment close pour l'abritement; pour voir qu'elle est aussi filtrante, remarquer simplement que, étant donnés deux éléments R, R' d'un âge $\mathcal{A}$ les éléments S de $\mathcal{A}$, minimaux pour l'abritement parmi ceux abritant à la fois R et R' sont en nombre fini).

Puisque $2^{\mathcal{A}}$ est un espace compact totalement discontinu, c'est-à-dire un espace de Stone, à base dénombrable (car $\mathscr{A}$ est dénombrable) il en résulte immédiatement:

II–1.3. THÉORÈME. *Pour la topologie de la descendance, l'ensemble $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ est un espace compact totalement discontinu à base dénombrable.* (Pour une preuve purement relationniste de la compacité voir R. Fraïssé [3] chap. 5, §7, p. 138).

II–1.4. *Propriétés élémentaires.* Les $\mathscr{A}^G_F$ définis ci-dessus et leurs réunions finies sont les ofs (parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathscr{D}(\mathscr{A})$). De la compacité résulte que ce sont les seuls. On voit immédiatement que si *$\mathscr{A}'$ est un sous-âge de $\mathscr{A}$ alors la topologie de la descendance de $\mathscr{A}$ induit exactement sur $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$ la topologie de la descendance de $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$ est fermé dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$.* Enfin $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$ est un of de $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ si et seulement si $\mathscr{A}'$ n'a qu'un nombre fini de bornes dans $\mathscr{A}$ (remarquer que si âge $\mathscr{A}'$ a un nombre infini de bornes alors, en raison de la compacité, on peut extraire de la suite des âges de ces bornes une suite convergeant vers un âge $\mathscr{A}''$ contenu dans $\mathscr{A}'$).

II–2. *Rapports avec la formule logique*

La topologie de la descendance est tout à fait classique; pour le voir, considérons le langage du premier ordre associé aux relations d'une même arité, puis les énoncés universels (énoncés qui, sous forme prénexe comportent seulement des quanteurs universels) de ce langage et enfin l'algèbre de Boole $\mathscr{B}$ des combinaisons booléiennes de ces énoncés (ce sont des disjonctions d'énoncés de la forme $U \wedge E$ où U est universel et E existentiel). On voit facilement que si $\mathscr{U}$ est un *ultrafiltre de $\mathscr{B}$ alors les modèles de la théorie engendrée par $\mathscr{U}$ sont toutes les relations d'un même âge*; *réciproquement la théorie associée à la classe des relations d'un même âge induit un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur $\mathscr{B}$*; *et ces deux correspondances sont inverses l'une de l'autre.*

On voit tout aussi facilement que la topologie de la descendance de l'âge formé de tous les types de relations finies n'est autre que la topologie de Stone sur l'ensemble des ultrafiltres de $\mathscr{B}$ (ce qui donne une preuve indirecte de 1.3). Pour retrouver par le même biais la topologie sur $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ il suffit de considérer au lieu de $\mathscr{B}$, l'algèbre quotient de $\mathscr{B}$ par le filtre des énoncés universels vrais dans toutes les relations d'âges $\mathscr{A}$.

III. Le procédé de réduction de Canton–Bendixon

III–1. Considérons un espace topologique X; à chaque ordinal α nous associerons le sous-espace fermé $X^{(\alpha)}$ défini par les règles suivantes:

(1) $X^{(0)}$ est égal à X,

(2) les $X^{(\beta)}$ étant définis pour $\beta < \alpha$; si α est isolé alors $X^{(\alpha)}$ est l'ensemble des points non isolés de $X^{(\alpha-1)}$ et si α est limite alors $X^{(\alpha)}$ est l'intersection des $X^{(\beta)}$ pour $\beta < \alpha$.

Les $X^{(\alpha)}$ sont appelés les *espaces dérivés de* X, l'espace $X^{(\alpha)}$ étant le α-ième *dérivé de* X et les éléments x de $X^{(\alpha)} - X^{(\alpha+1)}$ sont appelés les points de *degré* α de X (ce qui est noté $d^0(x) = \alpha$). Pour une raison de cardinalité il existe un α tel que pour $\alpha < \beta$ les $X^{(\beta)}$ sont tous égaux à $X^{(\alpha)}$; lorsque cet $X^{(\alpha)}$ est vide l'espace X est dit *clairsemé*.

III–2. Rappelons que *tout espace compact dénombrable est clairsemé* et que *tout espace compact clairsemé est un espace de Stone.* Réciproquement *si* X *est un espace de Stone à base dénombrable, (ce qui revient à dire que* X *est le dual d'une algèbre de Boole dénombrable) alors ou bien* X *est dénombrable, donc clairsemé, ou bien* X *est continupotent et, dans ce cas, il existe un ordinal dénombrable* α *tel que pour* $\beta < \alpha$ *les* $X^{(\beta)} - X^{(\beta+1)}$ *sont non vides et au plus dénombrables alors que pour* $\beta > \alpha$ *les* $X^{(\beta)}$ *sont tous égaux et homéomorphes à l'espace triadique de Cantor.*

III–3. En appliquant ce dernier résultat à la descendance d'un âge il s'ensuit que un âge contient soit un nombre dénombrable, soit un nombre continupotent de sous-âges (dans le premier cas les sous-âges forment donc un espace clairsemé).

III–4. Les espaces compacts dénombrables sont parfaitement connus depuis Mazurkiewicz et Sierpinski [13] puis Mayer et Pierce [10]: ce sont les ordinaux de la forme $\omega^{\beta}n + 1$ (avec β dénombrable et n entier) munis de la topologie des intervalles. Par la même sont connues les algèbres de Boole associées à ces espaces (voir par exemple les travaux de Day [1]). Il serait certainement intéressant de connaître aussi bien les algèbres de Boole des combinaisons booléiennes d'énoncés universels ayant de tels espaces de Stone.

En particulier il nous paraît intéressant de décrire les classes de modèles associées aux ultrafiltres de ces algèbres de Boole. C'est bien ce type d'études que nous entamons modestement dans ce texte (en nous plaçant toutefois dans le cadre restrictif de la théorie des relations) et particulièrement dans le paragraphe suivant.

IV. Ages de degré fini

IV–1. *Ages de degré* 0. *Dans un âge quelconque* $\mathcal{A}$ *les sous-âges isolés pour la topologie de la descendance de* $\mathcal{A}$ *sont exactement les âges des relations finies de* $\mathcal{A}$; *en outre l'ensemble de ces âges est partout dense dans la descendance de* $\mathcal{A}$.

IV–2. *Ages de degré* 1. Nous allons voir que *si l'ensemble fermé* $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$, *obtenu en enlevant à* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *ses points isolés, n'est pas vide alors il a des points isolés et ceux-ci forment un ensemble partout dense dans* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Pour cela, nous avons besoin de la notion de relation *presque enchaînable* introduite par R. Fraïssé [6].

2.1. Considérons une relation R de base E et une partie finie F de E; nous dirons que R est F*-enchaînable* lorsqu'il existe une chaîne (ou ordre total) C de base $E-F$ telle que tout automorphisme local de C, prolongé par l'identité sur F, donne un automorphisme local de R. Lorsque F est vide nous dirons que R est *enchaînable.* Nous dirons qu'une relation est *presque enchaînable* lorsqu'il existe une partie finie F de sa base pour laquelle elle est F-enchaînable.

2.2. Nous allons utiliser les deux résultats suivants: (voir [6] et [7]):

(a) si R est une relation de base infinie E alors pour toute partie finie F de E il existe une restriction infinie de R qui est F-enchaînable.

(b) Une relation presque enchaînable n'a qu'un nombre fini de bornes (comptées à l'isomorphie près).

2.3. THÉORÈME. *Considérons un âge* $\mathcal{A}$ *et l'ensemble* $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$ *des sous-âges infinis de* $\mathcal{A}$; *un âge est isolé dans* $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$ *si et seulement si c'est l'âge d'une relation presque enchaînable, en outre l'ensemble de ces âges est partout dense dans* $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$.

PREUVE. Considérons un sous-âge infini $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ et un of de la forme $\mathcal{A}^G_F$ contenant $\mathcal{A}'$. Soit R un élément de $\mathcal{A}'$ abritant tous les R_i de F. Une relation d'âge $\mathcal{A}'$ est infinie et possède une restriction de type R, donc d'après 2.2.a) elle possède une restriction presque enchaînable infinie ayant encore une restriction de type R. L'âge de cette restriction presque enchaînable contenant R et étant contenu dans $\mathcal{A}'$ appartient donc à $\mathcal{A}^G_F$.

Ceci montre d'une part que les âges des relations presque enchaînable infinies forment un ensemble partout dense dans $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$ et d'autre part qu'un âge isolé dans $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$ est l'âge d'une relation presque enchaînable. Pour obtenir la réciproque remarquons que l'âge $\mathcal{A}'$ d'une relation presque enchaînable n'a qu'un nombre fini de sous-âges infinis $\mathcal{A}'_i$ distinct de $\mathcal{A}'$; prenons alors un élément R_i dans chaque $\mathcal{A}'-\mathcal{A}'_i$ puis les bornes S_j de $\mathcal{A}'$ appartenant à $\mathcal{A}$. L'of 0, formé de sous-âges de $\mathcal{A}$ ne contenant aucune des S_j (qui sont en nombre fini d'après b) et contenant tous les R_i, contient évidemment $\mathcal{A}'$. Tout autre sous-âge appartenant à 0 ne contient aucune des S_j, donc est un sous-âge de $\mathcal{A}'$; ne pouvant être égal à l'un des $\mathcal{A}_i$ car contenant les R_i, un tel sous-âge est fini. Par suite $\mathcal{A}'$ est isolé dans $\mathcal{D}^1(\mathcal{A})$.

2.4. REMARQUE. Un résultat équivalent mais ne plaçant pas les relations presque enchaînables dans un contexte topologique a été déjà obtenu dans [6] (Théorème 2.6.4.).

Nous ne savons pas obtenir ce résultat sans utiliser la finitude des bornes d'une relation presque-enchaînable. A ce propose signalons que la finitude des bornes d'une relation enchaînable a été obtenue pour la première fois par C. Frasnay [8] au moyen de son théorème de recollement, théorème dont la preuve est à la fois très longue et difficile. C'est en utilisant ce théorème, que R. Fraïssé en a déduit la finitude des bornes d'une relation presque-enchaînable (voir par exemple [6] et [7]). Récemment, en renforçant la notion de belordre, nous avons obtenu par un argument plutôt bref, un critère général sur la finitude des bornes d'une relation qui redonne immédiatement la finitude des bornes d'une relation presque-enchaînable [11].

IV–3. *Ages de degré n*

IV–3.1. Pour conclure signalons que *étant donné un âge quelconque $\mathcal{A}$, pour chaque entier n les sous-âges de $\mathcal{A}$ de degré n ont un nombre fini de bornes et forment un ensemble partout dense dans le n-ième dérivé de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$*. La preuve de ce résultat sera publiée ultérieurement.

IV–3.2. REMARQUES. a) *Ce résultat ne s'étend pas au ω-ième dérivé de la descendance d'un âge, celui-ci pouvant être sans points isolés et donc homéomorphe à l'espace triadique de Cantor*, comme le montre l'exemple suivant:

On considère les Cycles C_n (C_n est la relation binaire sur les entiers $0, 1, \cdots, n-1$ qui prend la valeur + sur les seuls couples (x, y) pour lesquels $y - x \equiv 1$ modulo n) puis la relation C_∞ obtenue en faisant la somme directe des C_n pour $n > 3$ (C_∞ a pour base la réunion disjointe des bases des C_n, elle coïncide avec les C_n sur chacune de leur base et elle donne la valeur— aux couples d'éléments extraits de deux bases différentes). On considère enfin l'âge $\mathcal{C}_\infty$ de la relation C_∞; on voit alors facilement que les âges du ωième dérivé de la descendance de C_∞ sont exactement ceux qui contiennent l'âge $\mathcal{C}$ de la relation de consécutivité C (C est la relation binaire sur les entiers qui prend la valeur + sur les seuls couples (x, y) pour lesquels $y = x + 1$). On en déduit tout aussi facilement qu'aucun d'eux n'est isolé et donc que le ωième dérivé est l'espace triadique de Cantor.

b) Les âges $\mathcal{A}'$ de degré fini dans la descendance d'un âge $\mathcal{A}$ ont exactement même degré dans la descendance de n'importe quel âge les contenant. Ceci tient isomorphismes f de A sur A' qui se prolongent à H. D'après ce qui précède $\mathcal{U}(H)$ n'est pas vide; en outre pour deux parties finies H_1 et H_2 de E, l'ensemble $\mathcal{U}(H_1 \cup H_2)$ est contenu dans $\mathcal{U}(H_1) \cap \mathcal{U}(H_2)$. L'ensemble des $\mathcal{U}(H)$ engendre donc un filtre sur l'ensemble fini des isomorphismes f de A sur A'. Par suite il existe un certain H' tel que tous les $\mathcal{U}(H)$ contiennent $\mathcal{U}(H')$, ce qui signifie que si une f se prolonge à H' alors elle se prolonge à toute partie finie. Pour voir que f^{-1} a la même propriété, on applique ce qui précède à R'. On en déduit donc l'existence d'un isomorphisme g de A' sur A qui se prolonge à toute partie finie H de E'. Comme les isomorphismes de A sur lui-même sont en nombre fini il existe un entier n pour lequel $(g \circ f)^n$ est l'identité et donc $f^{-1} = (g \circ f)^{n-1} \circ g$. Par conséquent f^{-1} a la propriété annoncée.

c) Obtenons maintenant une partie H' indépendante de R'. Toutes les $R'|A'$ étant isomorphes, on suppose qu'elles sont égales sur un même ensemble, par exemple $1, 2, \cdots, m$. Ceci fait, à chaque R' on associe l'ensemble $\mathcal{U}(R')$ des isomorphismes f de A dans A' tels que f et f^{-1} se prolongent à toute partie finie de E et à toute partie finie de E'. Les $\mathcal{U}(R')$ étant des parties d'un ensemble fini, sont en nombre fini; on peut donc trouver $R'_1, \cdots, R'_p$ telles que l'intersection des $\mathcal{U}(R_i)$ soit égale à celle de tous les $\mathcal{U}(R')$. A chaque R'_i on associe alors la partie H'_i définie en b) et l'on prend la réunion H des H'_i. On constate immédiatement que cette partie H répond aux conditions du lemme. Q.E.D

V–2. *Engendrement d'un âge*

V–2.1. Etant donné un âge $\mathcal{A}$ nous dirons qu'un *sous-âge $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ et un élément S de $\mathcal{A}$ engendrent $\mathcal{A}$* lorsque $\mathcal{A}$ ne contient pas de sous-âge strict contenant à la fois $\mathcal{A}'$ et S (en d'autres termes $\mathcal{A}$ est minimal parmi les âges contenant S et $\mathcal{A}'$).

V–2.2. PROPOSITION. *Etant donné un âge $\mathcal{A}$ et un élément S de $\mathcal{A}$, l'ensemble des sous-âges $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tels que $\mathcal{A}'$ et S engendrent $\mathcal{A}$ a au plus 2^s éléments, s étant le nombre d'éléments de la base d'une représentante de S.*

PREUVE. Si cet ensemble ne contient que $\mathcal{A}$ alors l'énoncé est trivialement vrai. Sinon considérons une relation R d'âge $\mathcal{A}$ et de base E, puis l'intersection A des F contenus dans E pour lesquelles $R|F$ est de type S, et montrons que les $\mathcal{A}'$ tels que $\mathcal{A}'$ et S engendrent $\mathcal{A}$ sont entièrement déterminés par les parties de A. Pour cela prenons un âge $\mathcal{A}'$ distinct de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A}'$ et S engendrent $\mathcal{A}$ et prenons une relation R' d'âge $\mathcal{A}'$ et de base E'. Considérons maintenant les extensions de R' abritant S et d'âge contenu dans $\mathcal{A}$ (l'existence de telles extensions est connue, voir par exemple [4] théorème 3.4.3. p. 71). Comme $\mathcal{A}'$ et seulement au fait que les âges de degré fini ont uniquement un nombre fini de bornes. Plus généralement si un âge $\mathscr{A}$ a seulement un nombre fini de bornes et possède un degré dans la descendance d'un âge alors $\mathscr{A}$ a même degré dans la descendance de n'importe quel âge. Bien entendu un âge peut avoir un degré dans sa propre descendance sans en avoir dans la descendance de certains âges le contenant (l'âge de la consécutivité est de degré ω dans lui-même alors qu'il n'y a pas de degré dans l'âge de l'exemple précédent).

V. Descendance d'un âge de degré α

V-1. *Lemme essentiel*

Considérons une relation R de base E et un élément S de l'âge de R. Si l'intersection A des parties F de E pour lesquelles $R \mid F$ est de type S n'est pas vide, alors il existe une partie finie H de E contenant A et telle que pour tout isomorphisme f définie sur A et à valeur dans une R' de base E' et de même âge que R, si f se prolonge à H alors:

1°) *l'image $f(A)$ de A est égale à l'intersection A' des parties F' de E' pour lesquelles $R' \mid F'$ est de type S.*

2°) *f et f^{-1} se prolongent respectivement à toute partie finie de E et à toute partie finie de E'.*

(En particulier pour toute R' de même âge que R il existe un isomorphisme local de R vers R' vérifiant 1° *et* 2°.)

PREUVE. a) Montrons d'abord qu'il existe une partie B contenant A telle que pour tout isomorphisme local f de R vers R', si f est défini sur H contenant B alors l'image de f est égal à A'. Pour cela il suffit de considérer une suite finie $F_0, \cdots, F_m$ de parties E pour lesquelles R / F_i est de type S et dont l'intersection redonne A, puis de prendre pour B la réunion des F_i. En effet si f est défini au moins sur B alors de la définition de A' il s'ensuit que A' est contenu dans $f(A)$. Pour voir qu'il lui est égal on prend de même une suite finie de parties F' dont l'intersection donne A'; la restriction de R' à la réunion de ces F' étant isomorphe à une restriction de R par un isomorphisme f' il s'ensuit que A est contenu dans $f'(A')$; mais A et A' étant finis ceci entraîne qu'ils ont le même nombre d'éléments et donc que $f(A) = A'$.

b) Montrons maintenant que pour chaque R' du même âge que R il existe une partie finie H' contenant B telle que pour tout isomorphisme local f de R vers R' défini sur A, si f se prolonge à H' alors f et f^{-1} se prolongent respectivement à toute partie finie de E et à toute partie finie de E'. Pour cela associons à chaque partie finie H de E contenant B l'ensemble $\mathscr{U}(H)$ des

S engendrent $\mathscr{A}$, ces extensions sont toutes d'âges $\mathscr{A}$; mais comme les bases des représentantes ont s éléments nous pouvons choisir une extension R_1 à un sur-ensemble E_1 de E' telle que:

1) $E_1 - E'$ est fini, (d'au plus s éléments), et non vide (car S n'est pas dans $\mathscr{A}'$) et:

2) la restriction de R_1 à E_1 diminué d'un élément de $E_1 - E$ n'abrite pas S. Dans ces conditions l'ensemble fini $E_1 - E$ est contenu dans l'intersection A_1 des F_1 contenues dans E_1 pour lesquelles R_1F_1 est de type S. Si nous prenons maintenant un isomorphisme f de $R_1|A_1$ sur $R|A$ vérifiant les conditions du lemme, nous voyons aisément que la restriction de R à A diminué de $f(E_1 - E)$ est du même âge que R' et donc d'âge $\mathscr{A}'$. Par conséquent les $\mathscr{A}'$ sont en nombre inférieur ou égal aux parties de A et donc sont en nombre fini. Q.E.D.

Problèmes. De la proposition précédente il s'ensuit que les sous-âges maximaux contenus dans un âge donné $\mathscr{A}$ sont en nombre fini ou dénombrable. Nous ignorons si dans ce dernier cas l'âge $\mathscr{A}$ contient une suite strictement décroissante de sous-âges.

V–2.3. Corollaire. *Etant donné un âge $\mathscr{A}$ et un sous-âge $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ il existe un élément S de $\mathscr{A}$ pour lequel $\mathscr{A}'$ et S engendrent $\mathscr{A}$ si et seulement si les sous–âges $\mathscr{A}''$ de $\mathscr{A}$ qui contiennent $\mathscr{A}'$ sont en nombre fini.*

Preuve. Si $\mathscr{A}'$ et S engendrent $\mathscr{A}$ alors pour tout sous-âge $\mathscr{A}''$ de $\mathscr{A}$ contenant $\mathscr{A}'$ l'âge $\mathscr{A}''$ et S engendrent $\mathscr{A}$; donc d'après V–2.2. les $\mathscr{A}''$ sont en nombre fini. Réciproquement si les $\mathscr{A}''$ sont en nombre fini alors, du fait qu'un âge ne peut être égal à la réunion d'un nombre fini de sous-âge stricts, il existe un élément S de $\mathscr{A}$ qui n'appartient à aucun des $\mathscr{A}''$ contenant $\mathscr{A}'$ et strictement inclus dans $\mathscr{A}$. L'âge $\mathscr{A}'$ et un tel S engendrent donc $\mathscr{A}$.

V–3. *Ensembles convexes*

V–3.1. Disons qu'un ensemble $\mathscr{C}$ d'âges $\mathscr{A}$ est *convexe* lorsque tout âge $\mathscr{A}''$ compris entre deux âges $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire que $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}'' \subseteq \mathscr{A}$) appartient encore à $\mathscr{C}$.

Un tel ensemble étant une partie de la descendance de l'âge Ω formé des types d'isomorphie des relations de base finie (de l'arité considérée) nous pouvons le munir de la topologie induite par la topologie de la descendance. Ainsi nous dirons que c'est un *convexe fermé* s'il est fermé pour cette topologie. Par exemple *la descendance d'un âge $\mathscr{A}$ est un convexe fermé*; *plus généralement étant donnés un âges $\mathscr{A}$ et un sous-âge $\mathscr{A}'$ l'ensemble $[\mathscr{A}', \mathscr{A}]$ des âges $\mathscr{A}''$ compris entre $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$ est un convexe fermé.*

V–3.2. PROPOSITION. *Etant donné un convexe $\mathscr{C}$ (fermé ou non) si un âge $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{C}$ est isolé dans un dérivé de $\mathscr{C}$ alors il n'existe pas de suite strictement décroissante (pour l'inclusion) d'âges $\mathscr{A}'$ inclus dans $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{C}$.*

PREUVE. Supposons ceci faux et considérons le plus petit ordinal α pour lequel il existe un âge $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{C}$, de degré α dans $\mathscr{C}$ et contenant une suite strictement décroissante $\mathscr{A}_0 \supset \mathscr{A}_1 \cdots \supset \mathscr{A}_n \cdots$ de sous-âges appartenant tous à $\mathscr{C}$. Puisqu'un tel âge $\mathscr{A}$ est de degré α dans $\mathscr{C}$ et que tout ouvert de $\mathscr{D}(\Omega)$ est une réunion d'ofs (chacun de la forme Ω_F^G), il existe un of Ω_F^G tel que: $\mathscr{A}$ appartient à $\Omega_F^G \cap \mathscr{C}$ et si $\mathscr{A}'$ distinct de $\mathscr{A}$ appartient à $\Omega_F^G \cap \mathscr{C}$ alors $\mathscr{A}'$ a un degré β (dans $\mathscr{C}$) strictement inférieur à α. Pour un tel of Ω_F^G prenons un élément S dans $\mathscr{A}$ qui abrite tous les éléments R de F. Puisque les $\mathscr{A}_n$ sont en nombre infini, alors d'après V–2.2. il existe un n_0 pour lequel $\mathscr{A}_{n_0}$ et S n'engendrent pas $\mathscr{A}$ et par conséquent il existe un âge $\mathscr{A}'$, contenant $\mathscr{A}_{n_0}$ et S, qui est strictement inclus dans $\mathscr{A}$. Cet âge $\mathscr{A}'$ est évidemment dans Ω_F^G, mais puisqu'il est compris entre les âges $\mathscr{A}_{n_0}$ et $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{C}$ et que $\mathscr{C}$ est convexe il est dans $\mathscr{C}$, donc en définitive dans $\Omega_F^G \cap \mathscr{C}$. Cet âge $\mathscr{A}'$ etant distincte de $\mathscr{A}$ a donc un degré β qui est strictement inférieur à α (et donc α est distinct de 0). Comme il contient $\mathscr{A}_{n_0}$ il contient la suite strictement décroissante $\mathscr{A}_{n_0} \supset \mathscr{A}_{n_0+1} \supset \cdots \supset \mathscr{A}_m \supset \cdots$ ce que contredit la minimalité de α. Q.E.D.

V–3.3. COROLLAIRE. *Si un convexe fermé $\mathscr{C}$ est au plus dénombrable, alors il existe pas de suite strictement décroissante (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathscr{C}$.*

PREUVE. $\mathscr{C}$ étant fermé dans l'espace compact $\mathscr{D}(\Omega)$ est donc compact. $\mathscr{C}$ étant compact et au plus dénombrable tout élément $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}$ est isolé dans au moins un dérivé. Il suffit donc d'appliquer la proposition précédente.

Une étude détailée des convexes fermés fera l'objet d'une publication ultérieure. Ici nous ne retiendrons du corrolaire V–3.3. que ceci:

V–4. THÉORÈME. *Etant donné un âge $\mathscr{A}$ et un sous-âge $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$, si les âges $\mathscr{A}''$ compris entre $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$ sont en nombre au plus dénombrable alors on ne peut en extraire une suite strictement décroissante (pour l'inclusion).*

En particulier si les sous-âges $\mathscr{A}'$ d'un âge $\mathscr{A}$ sont en nombre au plus dénombrable alors on ne peut en extraire de suite strictement décroissante.

V–5. *Quelques problèmes concernant la descendance d'un âge*

V–5.1. Nous ignorons si la réciproque du théorème ci-dessus est exacte. Comme nous l'avons signalé nous ignorons même s'il suffit qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante de sous-âges d'un âge $\mathscr{A}$ pour que les sous-âges de $\mathscr{A}$ soient en nombre au plus dénombrables.

V–5.2. Etant donnés un âge $\mathscr{A}$ et un sous-âge $\mathscr{A}'$ de degré α dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$, nous ignorons si n'importe quel sous-âge $\mathscr{A}''$ de $\mathscr{A}'$ possède un degré β dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ et, le cas échéant, si β est au plus égal à α.

A propos de ce problème signalons ceci:

V–5.3. Etant donné un âge $\mathscr{A}$ et un sous-âge $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$, l'âge $\mathscr{A}$ est isolé dans un dérivé de l'ensemble $[\mathscr{A}', \mathscr{A}]$ des âges compris entre $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$ si et seulement si cet ensemble est tout au plus dénombrable.

PREUVE. La condition énoncé est évidemment suffisante puisque $[\mathscr{A}', \mathscr{A}]$ est un compact dénombrable. Réciproquement si $\mathscr{A}$ est isolé dans un dérivé de $[\mathscr{A}', \mathscr{A}]$ alors prenons un of Ω_F^G tel que $\Omega_F^G \cap [\mathscr{A}', \mathscr{A}]$ ne contienne que $\mathscr{A}$ et des âges de degré inférieur à celui de $\mathscr{A}$, puis prenons un élément S de $\mathscr{A}$ abritant tous les éléments R de F. A chaque âge $\mathscr{A}_i$ appartenant à $[\mathscr{A}', \mathscr{A}]$, associons un âge $\mathscr{A}_\iota$ engendré par $\mathscr{A}_\iota$ et S (un tel âge existe puisque l'intersection d'un ensemble d'âges, totalement ordonné pour l'inclusion, est encore un âge). Les $\mathscr{A}_i$ sont dans $\Omega_F^G \cap [\mathscr{A}', \mathscr{A}]$ qui ne contient qu'un nombre dénombrable d'âges; par conséquent si le nombre des $\mathscr{A}_i$ excède le dénombrable alors pour une infinité (non dénombrable) de $\mathscr{A}_i$ les $\hat{\mathscr{A}}_i$ sont égaux à un même âge, ce qui contredit la proposition V–2.2.

Ce fait montre que l'énoncé V–3.2. n'est pas essentiellement plus général que l'énoncé V–3.3. Vis à vis du problème V–5.2. il a pour conséquence:

V–5.4. a) si un sous-âge $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ est isolé dans un dérivé de $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ (c'est-à-dire que $\mathscr{A}'$ a un degré α dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ alors l'ensemble des sous-âges de $\mathscr{A}'$ est au plus dénombrable. (Remarquer que si $\mathscr{A}'$ est isolé dans un dérivé de $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ alors $\mathscr{A}'$ est isolé dans un dérivé de $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$).

b) si $\mathscr{A}$ a un degré α dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ alors tout sous-âge $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ a un degré β dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ (mais nous ignorons si $\beta \leqq \alpha$).

V–5.5. Etant donnée une chaîne de trois âges $\mathscr{A}'' \subseteq \mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$, si $\mathscr{A}''$ a un degré dans $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$ alors $\mathscr{A}''$ n'a pas forcément de degré dans $\mathscr{A}$ (prendre par exemple $\mathscr{A}'' = \mathscr{A}' =$ âge de la consécutivité sur les entiers et $\mathscr{A} =$ âge formé des relations binaires finies). Par contre, si $\mathscr{A}''$ a un degré α dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ alors il a un degré $\beta \leqq \alpha$ dans $\mathscr{D}(\mathscr{A}')$; mais nous ignorons si $\beta = \alpha$. De façon équivalente *nous ignorons si étant donné $\mathscr{A}'$ de degré α dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ et $\beta \leqq \alpha$ alors il existe un sous-âge $\mathscr{A}''$ de $\mathscr{A}'$ de degré β dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$*. Plus généralement nous ignorons si étant donné un sous-âge $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ de degré α dans $\mathscr{D}(\mathscr{A})$ alors il existe une suite croissante $\mathscr{A}'_0 \subseteq \mathscr{A}'_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{A}'_n \cdots$ de sous-âges de $\mathscr{A}'$ qui converge vers $\mathscr{A}'$ et telle que $\mathscr{A}' = \operatorname{Sup}\{d^0 \mathscr{A}'_n + 1\}$.

VI. Rapports entre la comparaison des âges et la comparaison des relations

V–1. *Représentation des âges*

Rappelons le théorème d'extension [4]:

1. Etant données deux relations R et R', si R' est moins âgée que R alors il existe une relation R^* (dont le cardinal de la base est égal au maximum des cardinaux des bases de R et R') qui est de même âge que R et qui abrite à la fois R et R'.

Donnons-en le renforcement suivant:

2. Etant donnée une famille $(R_i)_{i\in I}$ de relations R_i de base E_i il existe une famille $(R_i^*)_{i\in I}$ de relations R_i^* de base E_i^* telles que:

R1. Pour tout $i \in I$, $\mathrm{Card}\, E_i^* \leqq \Sigma_{i\in I}\mathrm{Card}\, E_i$ (en désignant par $\mathrm{Card}\, A$ le cardinal de l'ensemble A), R_i^* est du même âge que R_i et abrite R_i.

R2. Pour tout $i \in I, j \in I$, R_i^* s'abrite dans R_j^* si et seulement si R_i est moins âgée que R_j.

(Preuve. Avec le théorème d'extension on peut, pour chaque partie finie $I' \subseteq I$, trouver une famille $(R_i^*)_{i\in I'}$ vérifiant R1 et R2. Pour obtenir le résultat général il suffit d'appliquer le théorème de compacité en utilisant, par exemple, la méthode du diagramme de Robinson).

VI–1.3. Corollaire. *Etant donné un ensemble $\mathcal{S}$ d'âges $\mathcal{A}$ on peut associer à chaque $\mathcal{A}$ une relation $R_{\mathcal{A}}$ d'âge $\mathcal{A}$ et de base $E_{\mathcal{A}}$ telle que* $\mathrm{Card}\, E_{\mathcal{A}} \leqq \mathrm{Card}(\mathbf{N} \times \mathcal{S})$ *de sorte que $R_{\mathcal{A}'}$ s'abrite dans $R_{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\mathcal{A}'$ est inclus dans $\mathcal{A}$.*

VI–1.4. En particulier *étant donné un âge $\mathcal{A}$ il existe une relation R d'âge $\mathcal{A}$ qui pour tout sous-âge $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ possède au moins une restriction d'âge $\mathcal{A}'$*. Mais comme nous l'a montré le referee (février 1973) il n'existe pas forcément de R dénombrable vérifiant cette propriété: par exemple considérons pour chaque partie A de $\mathbf{N}$ la birelation $(C_A, 0)$ de base $\mathbf{N} \times \{A\}$ dans laquelle 0 est la relation unaire prenant la valeur + sur le seul élément $(0, A)$ et C_A la relation binaire prenant la valeur − sur les seuls couples $((x, A), (x, A))$ pour lesquels $x \in A$ ainsi que les couples $((x, A), (x+1, A))$ pour $x \in \mathbf{N}$. Comme tout élément de $(C_A, 0)$ est définissable par une formule existentielle, si R est une relation plus âgée que $(C_A, 0)$ alors elle abrite $(C_A, 0)$. Par conséquent si $\mathcal{A}$ est l'âge de la birelation $\amalg_{A\subseteq \mathbf{N}}(C_A, 0)$ somme directe des $(C_A, 0)$ (birelation sur la réunion des bases des $(C_A, 0)$ qui étend chacune des $(C_A, 0)$ et prend la valeur—sur tout couple d'éléments pris dans deux bases disjointes) alors toute birelation R d'âge

$\mathscr{A}$ ayant pour toute partie $A \subseteq \mathbf{N}$ une restriction de même âge que $(C_A, 0)$ abrite $\coprod_{A \subseteq \mathbf{N}}(C_A, 0)$ et donc est de cardinal continûpotent.

Comme autre cas particulier citons celui-ci:

VI–1.5. *Etant donnée une suite décroissante pour (l'inclusion)* $\mathscr{A}_0 \supseteq \mathscr{A}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{A}_n \supseteq \cdots$ *d'âge* $\mathscr{A}_n$ *il existe une suite décroissante (pour l'abritement)* $R_0 \geqq R_1 \geqq \cdots R_n \geqq \cdots$ *de relations dénombrables* R_n *d'âge* $\mathscr{A}_n$.

On peut renforcer cet énoncé par le biais de la notion suivante:

VI–2. *Concrétisation d'un ensemble d'âges*

VI–2.1. Etant donné un ensemble $\mathscr{S}$ *d'âges* $\mathscr{A}$ appelons *concrétisation de* $\mathscr{S}$ la donnée d'une relation R de base E et d'une application f de l'ensemble $\mathscr{S}$ dans l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ des parties de E possédant les propriétés suivantes:

C1. Pour tout âge $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{S}$, la restriction de R à $f(\mathscr{A})$ est d'âge $\mathscr{A}$.

C2. Pour tout âge $\mathscr{A}$ appartenant à $\mathscr{S}$ et tout âge $\mathscr{A}'$ appartenant à $\mathscr{S}$, l'âge $\mathscr{A}$ est inclus dans $\mathscr{A}'$ si et seulement si $f(\mathscr{A})$ est inclus dans $f(\mathscr{A}')$ (c'est-à-dire que f est un isomorphisme d'ordre de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{P}(E)$, ces deux ensembles étant ordonnés par l'inclusion). Lorsqu'en outre E est dénombrable la concrétisation est dite *dénombrable.*

Disons qu'un ensemble $\mathscr{S}$ est *concrétisable* lorsqu'il existe une concrétisation de $\mathscr{S}$.

VI–2.2. PROPOSITION. *Un ensemble* $\mathscr{S}$ *d'âges est concrétisable si et seulement si tout sous-ensemble fini* $\mathscr{S}'$ *de* $\mathscr{S}$ *est concrétisable.*
(Utiliser la méthode du diagramme de Robinson).

VI–2.3. THÉORÈME. *Tout ensemble* $\mathscr{S}$ *d'âges* $\mathscr{A}$, *qui est totalement ordonné pour l'inclusion admet un concrétisation dénombrable.*

PREUVE. Du théorème d'extension cité en VI–1.1. résulte que tout ensemble fini $\mathscr{S}'$ contenu dans $\mathscr{S}$ est concrétisable. Avec VI–2.2. il en résulte que $\mathscr{S}$ est concrétisable. Pour voir que $\mathscr{S}$ admet une concrétisation dénombrable remarquer qu'il existe un ensemble dénombrable $\mathscr{S}'$ inclus dans $\mathscr{S}$ tel que tout élément $\mathscr{A}$ de $\mathscr{S}$ soit la réunion des éléments $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{S}'$ qui sont inclus dans $\mathscr{A}$. A un tel ensemble $\mathscr{S}'$ associer une concrétisation dénombrable donc une relation R de base dénombrable E et une application f' de $\mathscr{S}'$ dans $\mathfrak{P}(E)$ vérifiant C1 et C2; définir enfin l'application f de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{P}(E)$ en posant $f(A) = \cup\{f'(\mathscr{A}')/\mathscr{A}' \in \mathscr{S}'$ et $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}\}$, et constater que R et f vérifient C1 et C2.

VI–2.4. Un ensemble fini d'âges n'est pas forcément concrétisable. Par exemple soit R la relation binaire de base N définie par $R(0,0) = R(1,1) = R(2,2) = +$; $R(n,n) = -$ pour tout $n \geqq 3$; $R(0,1) = R(1,0) = R(0,2) = +$ et

$R(n,m) = -$ pour tout autre couple (n,m). Alors l'ensemble formé des âges de $R, R|_{N-\{0\}}$, $R|_{N-\{1\}}$ et $R|_{N-\{2\}}$ n'est pas concrétisable. Même résultat en considérant les âges des restrictions de R aux parties de $\{0,1,2\}$.

VI–3. *Problèmes*

Soit $\mathscr{A}$ un âge pour lequel il n'existe pas de suite strictement décroissante (pour l'abritement) de relations dénombrables d'âge $\mathscr{A}$. Nous ignorons si tout sous-âge $\mathscr{A}'$ possède la même propriété. (Il peut exister des suites strictement décroissantes de sous-âges de $\mathscr{A}$.) Par contre même s'il n'existe pas de suite strictement décroissante de sous-âges de $\mathscr{A}$ il peut exister des suites strictement décroissantes de relations toutes d'âge $\mathscr{A}$. (Ce fait qui répond à une question de R. Fraïssé [5], est obtenu en [12]). Néammoins nous ignorons s'il existe ou non des suites strictement décroissantes d'arbres ordonnés dénombrables.

VII. Généralisations éventuelles

VII–1. Examinons la possibilité d'étendre les résultats précédents (essentiellement le théorème V–4) à des classes de structures plus générales que les relations. Pour cela plaçons nous dans le cadre de la théorie des modèles et considérons les structures $\mathscr{M}$ associées à un langage $\mathscr{L}$ comportant des prédicats et éventuellement des fonctions. Etant donnée une structure $\mathscr{M}$, ce qui correspond le plus naturellement à l'âge d'une multirelation est l'ensemble Γ des énoncés existentiels ϕ vrais dans $\mathscr{M}$, que nous appelons toutefois le *type existentiel* de $\mathscr{M}$ (afin d'éviter la confusion avec le terme d'âge). Ainsi lorsque $\mathscr{L}$ ne comporte qu'un nombre fini de prédicats c'est-à-dire lorsque les $\mathscr{M}$ sont des multirelations, il revient au même de dire que *l'âge de $\mathscr{M}'$ est inclus dans l'âge de $\mathscr{M}$ ou que le type existentiel de $\mathscr{M}'$ est inclus dans le type existentiel de $\mathscr{M}$.* Et, fait analogue à la caractérisation des âges en termes d'abritement, *un ensemble Γ d'énoncés existentiels est le type existentiel d'une structure $\mathscr{M}$ si et seulement si Γ est un filtre premier non trivial du treillis des énoncés existentiels de $\mathscr{L}$*, c'est-à-dire que 1) si $\phi \in \Gamma$ et $\phi \rightarrow \psi$ alors $\psi \in \Gamma$; 2) si $\phi, \psi \in \Gamma$ alors $\phi \wedge \psi \in \Gamma$; 3) si $\phi \vee \psi \in \Gamma$ alors soit $\phi \in \Gamma$ soit $\psi \in \Gamma$; 4) $0 \notin \Gamma$.[†] (On obtient le même énoncé en considérant les énoncés universels au lieu des énoncés existensiels, donc en définissant le *type universel de $\mathscr{M}$* comme l'ensemble des énoncés universels vrais dans $\mathscr{M}$). par conséquent se pose la question:

[†] En toute rigueur Γ est l'image réciproque du treillis obtenu en faisant le quotient de l'ensemble de tous les énoncés existentiels par l'équivalence élémentaire. Mais il n'y a pas d'inconvénient ici à identifier un énoncé avec l'ensemble de ceux qui lui sont élémentairement équivalents.

Est-il vrai que: *si l'ensemble des types existentiels inclus dans un type existentiel est au plus dénombrable alors on ne peut en extraire une suite strictement décroissante (pour l'inclusion)*?

VII–2. Bien que la notion de type existentiel intervienne de plus en plus fréquemment en théorie des modèles (notamment dans l'étude des divers forcing de A. Robinson) formulons cette question en des termes plus classiques. Pour cela, rappelons que, suivant A. Robinson (voir par exemple [2]), une théorie universelle T (théorie engendrée par des énoncés universels) est dite *irréductible* lorsque T n'est pas égale à l'intersection de deux théories universelles distinctes de T. Il revient au même de dire qu'une théorie universelle est irréductible, que l'ensemble des énoncés existentiels consistants avec T est un type existentiel ou que la classe des modèles de T possède la *propriété d'extension commune* (Joint Embedding Property) c'est-à-dire que deux modèles de T s'immergent dans au moins un modèle de T). donc la question précédente se ramène à celle-ci: *est-il vrai que si les théories universelles irréductibles contenant une théorie universelle irréductible T sont en nombre dénombrable alors on ne peut en extraire une suite strictement croissante*?

VII–3. Dès que le langage comporte des symboles de fonction la réponse est en général négative. Voici deux exemples:

1*er Exemple.* Soit $\mathscr{L}$ le langage comportant un symbole de fonction s (de poids 1) et une infinité de prédicats unaires $u_0, u_1 \cdots u_n \cdots$ Soit T la théorie universelle de la structure $\mathscr{M} = (S, (U_n)_{n\in N})$ ayant pour base l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers, la fonction S étant la fonction successeur (définie par $S(x) = x + 1$) et U_n la relation unaire ne prenant la valeur $+$ que pour les x inférieurs ou égaux à n. En caractérisant les modèles de T, on voit facilement que les théories universelles irréductibles contenant T forment la chaîne

$$T = T_0 \subset T_1 \cdots \subset T_n \cdots \subset T_\omega$$

dans laquelle T_n est la théorie universelle de la restriction $\mathscr{M}_n$ e $\mathscr{M}$ à l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n, et T_ω (qui est aussi l'intersection des T_n) est la théorie de la structure $\mathscr{M}_\omega = (S, U'_n)$ sur l'ensemble des entiers dans laquelle S est la fonction successeur et les U'_n sont les relations unaires prenant partout la valeur $-$.

2*ème Exemple.* Soit $\mathscr{L}$ le langage comportant un symbole de fonction s (de poids 1) et un seul prédicat unaire u. Soit T la théorie universelle de la structure (S, U) ayant pour base l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers, la fonction S étant la fonction successeur, et U la relation unaire qui prend la valeur $+$ en 0, la valeur $-$ en 1, la valeur $+$ sur tout entier $n = q(q+1)+r$ tel que $1 \leqq q$ et $0 \leqq r < q$, enfin la valeur $-$ sur tout autre entier (forcément de la forme $(q+1)^2 + r$ avec $0 \leqq r < q$). En d'autres termes si U prend la valeur $+$ sur q entiers consécutifs puis la valeur $-$ sur les q entiers consécutifs qui suivent alors sur les suivants elle prend d'abord $q+1$ fois la valeur $+$ puis $q+1$ fois la valeur $-$; ainsi on a l'alternance:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} + & - & + & + & - & - & + & + & + & - & - & - & \text{etc}\cdots \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \rightarrow \end{array}$$

Comme précédemment soit T_n la théorie universelle de la restriction $\mathcal{M}_n$ de $\mathcal{M}$ à l'ensemble des entiers au moins égaux à n et soit T_ω l'intersection des T_n. On voit facilement que T_ω est la théorie obtenue en ajoutant à T les axiomes (en nombre infini) exprimant que si $S(x) = y$ et $U(x) \neq U(y)$ alors pour tout n et tout z ; 1) si $S^n(z) = x$ alors $U(z) = U(x)$ et 2) si $S^n(y) = z$ alors $U(z) = U(y)$. Il en résulte en premier lieu qu'une théorie universelle irréductible contenant T est soit une T_n soit contient T_ω; en second lieu que si elle contient T_ω alors elle est finiment axiomatisable modulo T. Par suite les théories universelles contenant T sont en nombre dénombrable.

VII–4. *La réponse est positive lorsque le langage ne comporte que des prédicats et des constantes* (en nombre quelconque): Ce résultat dont nous conjecturions la possibilité a été obtenu par le referee (janvier 77). La preuve consiste à étendre le lemme essentiel V–1. Voici comment: étant donnée une structure relationnelle $M = (R_i)_{i \in I}$ de base E appelons *sous-structure finie* de M toute multirelation $(R_i)_{i \in I'} \restriction F$ obtenue en restreignant à une partie finie F de E un ensemble *fini* I' de relation R_i figurant dans M. Appelons isomorphisme local de M dans M' tout isomorphisme d'une sous-structure finie de M dans une sous-structure M'. Le lemme devient ceci:

LEMME.[†] *Soit M une structure relationnelle de base E et S le type d'isomorphie d'une sous-structure finie de M. Si l'intersection A des bases des sous-structures finies de M dont le type est S est non vide alors il existe une partie finie H de E contenant A et une sous-structure T de base H telles que pour tout isomorphisme*

[†] Nous avons obtenu un résultat un peu plus général, conduisant à une extension du théorème cité, dans *Chaîne de théorie universelle*, à paraître à Fundamenta Mathematicae (soumis en Juillet 1976).

local f (défini sur A) de M vers une structure M' ayant même type existentiel, si f s'étend à T alors:

1. *l'image $f(A)$ de A est l'intersection des bases des sous-structures finies de M' dont le type est S.*
2. *f et f^{-1} s'étendent respectivement à toute sous-structure finie de M, et de M'.*

Il admet comme corollaire l'analogue de la proposition V–2.1.:

Un type existentiel Γ contenant le type Γ' et l'énoncé ϕ est dit *engendré* par Γ' et ϕ lorsque Γ est minimal parmi les types contenant Γ' et ϕ. *Si le langage ne comporte pas de prédicats et des constantes alors pour tout type existentiel Γ et tout énoncé ϕ de Γ l'ensemble des Γ' qui avec ϕ engendrent Γ est fini, (ceci est faux lorsque le langage comporte des fonctions, un énoncé pouvant à lui seul engendrer Γ).*

Le résultat annoncé s'ensuit directement.

VII–5. Signalons enfin deux problèmes suivants:

VII–5.1. Etant donnée une théorie universelle irréductible T, est-ce que si les chaînes (pour l'inclusion) de théories universelles irréductibles contenant T sont au plus dénombrables alors l'ensemble de ces théories est au plus dénombrables.

VII–5.2. Etant donnée une théorie universelle T, soit $U(T)$ l'ensemble des énoncés universels ϕ consistant avec T, préordonné par la déduction modulo T (c'est-à-dire que $\phi \leqq \psi$ lorsque $\phi \rightarrow \psi \in T$). Il revient évidemment au même de dire qu'*il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de $U(T)$, que toute théorie universelle contenant T est finiment axiomatisable modulo T, ou qu'il n'existe pas de suite strictement croissante de théories universelles contenant T.* Grâce à la compacité ceci revient encore à dire que *toute théorie universelle irréductible contenant T est finiment axiomatisable modulo T* (en effet s'il existe des théories universelles T' contenant T et non finiment axiomatisable modulo T alors leur ensemble possède un élément maximal pour l'inclusion, élément qui est trivialement irréductible). *Nous ignorons si lorsque T est irréductible cela revient à dire qu'il n'existe pas de suite strictement croissante (pour l'inclusion) de théories universelles contenant T (c'est faux lorsque T n'est pas irréductible).*

Acknowledgment

Nous remercions vivement le referee pour ses suggestions, notamment celles concernant l'extension aux structures relationnelles du théorème V–4.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. W. Day, *Superatomic boolean algebra*, Pacific J. Math. **23** (1967), 479–489.

2. E. Fisher and A. Robinson, *Inductive theories and their forcing companions*, Israel J. Math. **12** (1972), 95–107.

3. R. Fraïssé, *Cours de Logique Mathématique*, Tome 1, *Relation et formule logique*, 2ème Edition, Gauthier-Villars, Paris, 1971.

4. R. Fraïssé, *Cours de Logique Mathématique*, Tome 2, *Théorie des modèles*, 2ème Edition, Gauthier-Villars, Paris, 1972.

5. R. Fraïssé, *Abritement entre relations et spécialement entre chaînes*, Symposia Mathematica **5** (1970), 203–251.

6. R. Fraïsse et M. Pouzet, *Interprétabilité d'une relation par une chaîne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **272** (1971), 1624.

7. R. Fraïssé et M. Pouzet, *Sur une classe de relations n'ayant qu'un nombre fini de bornes*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér A, **273** (1971), 275.

8. C. Frasnay, *Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 415–524.

9. J. B. Kruskal, *Well quasi ordering, the tree theorem, and Wazsonyi's conjecture*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 210–225.

10. R. D. Mayer and R. S. Pierce, *Boolean algebras with ordered bases*, Pacific J. Math. **10** (1960), 925–942.

11. M. Pouzet, *Le belordre d'abritement et ses rapports avec les bornes d'une multirelation*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, **274** (1972), 1677–1680.

12. M. Pouzet, *Ages belordonnés*, preprint.

13. W. Sierpinski et S. Mazurkiewicz, *Contribution à la topologie des ensembles*, Fund. Math. **1** (1920), 17–27.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD
43, b[d] DU 11 NOVEMBRE 1918
69621—VILLEURBANNE, FRANCE